15th July 2024 Classwork Monday

Chapter 2 :- "Theory of Quadratic Equations"

Exercise 2.2 :-

Q1:- Find cube roots of following,

(i) -1

Sol:- let $x = (-1)^{1/3}$

$x^3 + 1 = 0$

$x^3 + (1)^3 = 0$

$\because a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(x+1)(x^2 - x + (1)^2)$

$(x+1)(x^2 - x + 1)$

$x = -1$, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$

$= \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

$x = -\omega$, $x = -\omega^2$

(iii) 8

Sol: let $x = (8)^{1/3}$

$x^3 = 8$

$x^3 - (2)^3 = 0$

$\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(x-2)(x^2 + (x)(2) + (2)^2)$

$(x-2)(x^2+2x+4)$

$x=2$, $a=1$, $b=2$, $c=4$

$$= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-1} \times \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm i\sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm i\,2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{2(-1+i\sqrt{3})}{2}, \frac{2(-1-i\sqrt{3})}{2}$$

$x = 2, 2\omega, 2\omega^2$

(iii) -27

Sol:- let $x = (-27)^{1/3}$

$x = -(3)^{1/3}$

$x^3 + (3)^3 = 0$

$\because a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(x+3)(x^2-(3)(x)+(3)^2)$

$(x+3)(x^2-3x+9)$

$x=-3$, $a=1$, $b=-3$, $c=9$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm i\,3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{3(-1+i\sqrt{3})}{2}, \frac{3(-1-i\sqrt{3})}{2}$$

$x = -3, -3\omega, -3\omega^2$

(iv) 64

Sol: let $x = (64)^{1/3}$

$x^3 = (4)^{1/3}$

$x^3 - (4)^3 = 0$

$\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(x-4)(x^2+(4)(x)+(4)^2)$

$(x-4)(x^2+4x+16)$

$x=4$, $a=1$, $b=4$, $c=16$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16-64}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm i4\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{4(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{4(-1+i\sqrt{3})}{2}, \frac{4(-1-i\sqrt{3})}{2}$$

$x = 4, 4\omega, 4\omega^2$

Q2:- Evaluate:-

(i) $(1-\omega-\omega^2)^7$

Sol:- $\because 1+\omega+\omega^2=0$

$\omega+\omega^2=-1$

$= [1-(\omega+\omega^2)]^7$

$= [1-(-1)]^7$

$= (1+1)^7$

$= (2)^7$

$= 128$

$1+\omega+\omega^2=0$

$\omega+\omega^2=-1$

$\omega^3=1$

$\omega^2=\frac{1}{\omega}$

(ii) $(1-3\omega-3\omega^2)^5$

Sol:- $[1-3(\omega+\omega^2)]^5$

$= [1-3(-1)]^5$

$= (1+3)^5$

$= (4)^5$

$= 1024$

(iii) $(9+4\omega+4\omega^2)^3$

Sol:- $[9+4(\omega+\omega^2)]^3$

$= [9+4(-1)]^3$

$= [9-4]^3$

$= (5)^3$

$= 125$

Scanned with CamScanner

(iv) $(2+2\omega-2\omega^2)(3-3\omega+3\omega^2)$

Sol: $(2(1+\omega)-2\omega^2)\,[3(1+\omega^2)-3\omega]$

$= [2(-\omega^2)-2\omega^2]\,[3(1+\omega^2)-3\omega]$

$= (-2\omega^2-2\omega^2)\,[3(-\omega)-3\omega]$

$= (-4\omega^2)(-3\omega-3\omega)$

$= (-4\omega^2)(-6\omega)$

$= 24\omega^3$

$= 24(1)$

$= 24$

(v) $(-1+\sqrt{-3})^6+(-1-\sqrt{-3})^6$

Sol: Divide & multiply by "2":

$= \frac{2^6}{2^6}(-1+\sqrt{-3})^6 + \frac{2^6}{2^6}(-1-\sqrt{-3})^6$

$= 2^6\,\frac{(-1+\sqrt{-3})^6}{2^6} + 2^6\,\frac{(-1-\sqrt{-3})^6}{2^6}$

$= 2^6\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^6 + 2^6\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^6$

$= 2^6\omega^6 + 2^6(\omega^2)^6$

$= 2^6(\omega^6+\omega^{12})$

$= 2^6\,[(\omega^3)^2+(\omega^3)^4]$

$= 2^6\,[(1)^2+(1)^4]$

$= 2^6(1+1)$

$= 2^6(2)$

$= 64(2)$

$= 128$

(vi) $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^9 + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^9$

Sol: $(\omega)^9 + (\omega^2)^9$

$= \omega^9 + \omega^{18}$

$= (\omega^3)^3 + (\omega^3)^6$

$= (1)^3 + (1)^6$

$= 1+1$

$= 2$

(vii) $\omega^{37} + \omega^{38} - 5$

Sol: $\omega^{36}.\omega^1 + \omega^{36}.\omega^2 - 5$

$= (\omega^3)^{12}.\omega + (\omega^3)^{12}.\omega^2 - 5$

$= (1)^{12}.\omega + (1)^{12}.\omega^2 - 5$

$= \omega + \omega^2 - 5$

$= (-1) - 5$

$= -6$

Scanned with CamScanner

(viii) $\omega^{-13} + \omega^{-17}$

Sol:- $\frac{1}{\omega^{13}} + \frac{1}{\omega^{17}}$

$= \left(\frac{1}{\omega}\right)^{13} + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{17}$

$= (\omega^2)^{13} + (\omega^2)^{17}$

$= \omega^{26} + \omega^{34}$

$= \omega^{24}.\omega^2 + \omega^{33}.\omega$

$= (\omega^3)^8.\omega^2 + (\omega^3)^{11}.\omega$

$= \omega^2 + \omega$

$= -1$

Q3:- Prove that $x^3+y^3 = (x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

Sol:- Considering R.H.S :-

$= (x+y)[x(x+\omega^2 y)+\omega y(x+\omega^2 y)]$

$= (x+y)(x^2+\omega^2 xy+\omega xy+\omega^3 y^2)$

$= (x+y)[x^2+xy(\omega^2+\omega)+(1)y^2]$

$= (x+y)[x^2+xy(-1)+y^2]$

$= (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$\Rightarrow \because a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$= x^3+y^3$

Hence proved that

L.H.S = R.H.S

Scanned with CamScanner

Q4:- Prove that:-

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

Sol:- Consider R.H.S:-

$$=(x+y+z)[x(x+\omega^2 y+\omega z)+\omega y(x+\omega^2 y+\omega z)+\omega^2 z(x+\omega^2 y+\omega z)]$$

$$=(x+y+z)[x^2+\omega^2 xy+\omega xz+\omega xy+\omega^3 y^2+\omega^2 yz+\omega^2 xz+\omega^4 yz+\omega^3 z^2]$$

$$=(x+y+z)[x^2+\omega^2 xy+\omega xy+\omega xz+\omega^2 xz+\omega^2 y^2+\omega^2 yz+\omega^4 yz+\omega^3 y^2+\omega^3 z^2]$$

$$=(x+y+z)[x^2+xy(\omega^2+\omega)+xz(\omega+\omega^2)+(1)y^2+y^2(\omega^2+\omega^3.\omega)+(1)y^2+(1)z^2]$$

$$=(x+y+z)[x^2+xy(-1)+xz(-1)+y^2+yz(\omega^2+(1)\omega)+y^2+z^2]$$

$$=(x+y+z)(x^2-xy-xz+y^2+yz(-1)+y^2z^2)$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

((Proved))

Q5:- Prove that;

$(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8) \ldots 2n$ factors $=1$

Sol:- Consider L.H.S:-

$= (-\omega^2)(-\omega)(1+\omega^3.\omega)(1+\omega^6.\omega^2)$

$= (\omega^3)(1+(1)\omega)(1+(\omega^3)^2\ \omega^2)$

$= (1)(1+\omega)(1+(1)^2\ \omega^2)$

$= (1)(1+\omega)(1+(1)\omega^2)$

$= (-\omega^2)(1+\omega^2)$

$= -\omega^2\ (-\omega)$

$= \omega^3$

$\Rightarrow 1 \quad \ldots 2n$ factors ((proved!))